① Цепи Маркова

1) Матрица переходов P, зависимость только от предыдущего шага, однородная / неоднородная

2) Состояния: поглощающие, возвратные, взаимно достижимые
Разложение на неприводимые подцепи
Периодичность, период НОД(....), внутри подцепи один и тот же

} классификация

3) Стационарное состояние, возведение матрицы переходов в степень

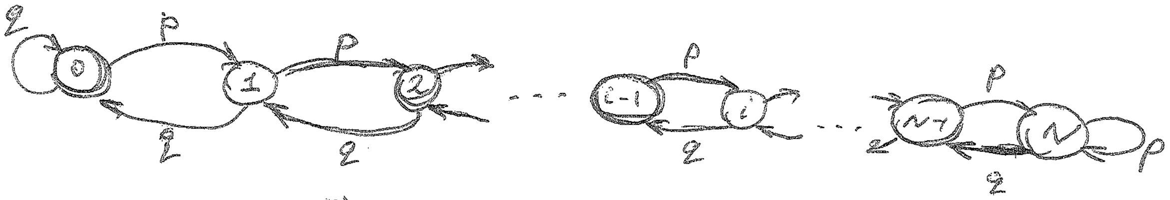
4) Случайные блуждания из домашки

5) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ поглощающее состояние 3 — летучка

оценить среднее время до поглощения, если начали из состояния 1

$\psi(3) = 0$; $\psi(2) = 1 + 1/2\psi(2) + 1/2\psi(3)$; $\psi(1) = 1 + 1/3\psi(1) + 1/2\psi(3)$

отсюда $\psi(3) = 0$; $\psi(2) = 2$; $\underline{\psi(1) = 2{,}5}$.

6) 

$\pi(i)\, q = \pi(i-1)\, p$

$\pi(i) = \frac{p}{q}\pi(i-1) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \pi(i-2) = \ldots = \left(\frac{p}{q}\right)^i \pi(0)$

$\pi(0) + \pi(1) + \ldots + \pi(N) = 1 \Rightarrow \pi(0)\left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{p}{q}\right)^N\right] = 1$

$\pi(0) = \frac{(p/q)^N - 1}{(p/q) - 1}$, $p \neq q$

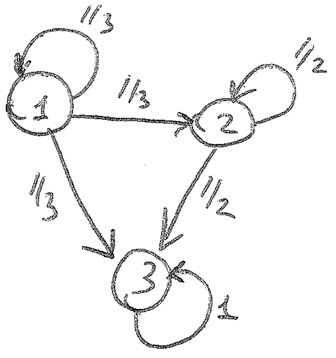
Если $p = q$, то $\pi(0) = \left[1 + p/q + \ldots + (p/q)^N\right]^{-1} = \frac{1}{N+1} = \pi(i)\ \forall i$ — равномерн.

7) $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\lim\limits_{n \to \infty} P^n = ?$

Отв. $\begin{pmatrix} 3/6 & 2/6 & 1/6 \\ 3/6 & 2/6 & 1/6 \\ 3/6 & 2/6 & 1/6 \end{pmatrix}$

$\underline{\pi P = \pi}$

(1) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



среднее время до поглощения из состояния 1 -?

а)

за 1 шаг: $1 \to 3$, $p = 1/3$

за 2 шага: $1 \to 1 \to 3$: $p = 1/3 \cdot 1/3 = 1/9$

$1 \to 2 \to 3$: $p = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6$

за $n > 2$ шагов: $k = 0 \dots n-2$ $\quad 1 \to 1 + 1 \to 2 + (n-2-k)\ 2 \to 2 + 2 \to 3$

$n-1$ $\quad 1 \to 1 + 1 \to 3$

<u>Имеем:</u> $1 \cdot 1/3 + 2 \cdot (1/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 1/2) + \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-2} (1/3)^k \cdot 1/3 (1/2)^{n-2-k} 1/2 + (1/3)^{n-1} 1/3 \right]$

$= \frac{8}{9} + \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot (1/3)^{n-1} + \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot 1/6 (1/2)^{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} (2/3)^k = \frac{8}{9} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(1-1/3)^2} - 1 - 2 \cdot 1/3\right]$

$+ 1/6 \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot (1/2)^{n-2} \cdot \frac{1-(2/3)^{n-1}}{1-2/3} = \frac{8}{9} + \frac{1}{3}\left[\frac{9}{4} - \frac{5}{3}\right] + \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot (1/2)^{n-2} (1 - (\frac{2}{3})^{n-1})$

$= \frac{8}{9} + \frac{27-20}{36} + \frac{1}{2} \cdot 2 \sum_{n=3}^{\infty} n \cdot (1/2)^{n-1} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} n \left(1/2 \cdot \frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{8}{9} + \frac{7}{36} +$

$+ \left[\frac{1}{(1-1/2)^2} - 1 - 2 \cdot 1/2\right] - \left[\frac{1}{(1-1/3)^2} - 1 - 2 \cdot 1/3\right] = \frac{32+7}{36} + 2 - \left(\frac{9}{4} - \frac{5}{3}\right)$

$= \frac{39 - 3 \cdot 27 + 20 \cdot 3}{36} + 2 = \frac{18}{36} + 2 = \underline{\underline{2{,}5}}$

$60 - 81 + 39 = 18$

б) Пусть X_3 – число шагов, если начать из (3)

X_2 – число шагов, если начать из (2)

X_1 – число шагов если начать из (1) – искомое

$X_3 = 0$; $E[X_2] = \sum_{x_2 \in X_2} x_2 P(X_2 = x_2) = \sum_{x=1}^{\infty} x \left[P(X_2 = x | \text{втор. сос. } 1) P(\text{втор. сос. } 1) + \dots\right]$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \left[p_{2\to1}\, p(\text{втор.. сос. } 1) + p_{2\to2}\, p(\text{втор.. сос. } 2) + p_{2\to3}\, p(\text{втор.. сост. } 3) \right] =$$

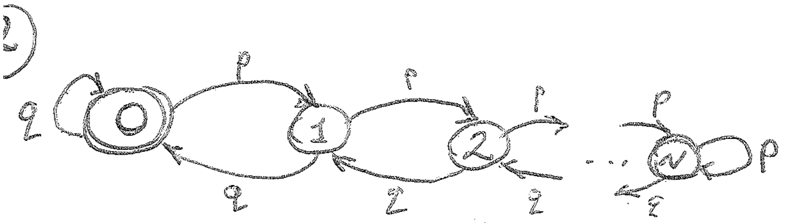
$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \left[p_{2\to1} \cdot p(\bar{X}_1 = x-1) + p_{2\to2} \cdot p(\bar{X}_2 = x-1) + p_{2\to3} \cdot p(\bar{X}_3 = x-1) \right] = [x' = x-1] =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} (x+1) \left[p_{2\to1}\, p(X_1 = x) + p_{2\to2}\, p(\bar{X}_2 = x) + p_{2\to3}\, p(\bar{X}_3 = x) \right] =$$

$$= p_{2\to1} \sum_{x=0}^{\infty} x\, p(X_1 = x) + p_{2\to2} \sum_{x=0}^{\infty} x\, p(X_2 = x) + p_{2\to3} \cdot \sum_{x=0}^{\infty} x\, p(X_3 = x) +$$

$$+ \sum_{x=0}^{\infty} (\text{полная вероятность}) = \underline{1 + p_{2\to1} \overline{X_1} + p_{2\to2} \overline{X_2} + p_{2\to3} \overline{X_3}}.$$

2)



$$\underline{p + q = 1}$$

Пусть начальное распределение $\pi^{(0)}(i)$. Найдём $\pi^{(k)}(i)$ — ?

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ddots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \ddots & p & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & q & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ & \vdots & \vdots & \ddots & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & 0 & p \\ & & & & 0 & q & p \end{bmatrix}$$

$$\underline{\left(\pi^0(0)\ \pi^0(1) \ldots \pi^0(N) \right) P^k = \left(\pi^k(0) \ldots \pi^k(N) \right)}$$

<u>Стационарные вероятности:</u>

$$\pi^k(0) \cdot p + \pi^k(2) q = \pi^{k+1}(1)$$

$$\pi^k(1) \cdot p + \pi^k(3) q = \pi^{(k+1)}(2)$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\pi(i) \cdot p + \pi(i+2) q = \pi(i+1)} \Rightarrow (*)$$

первое ур-е: $\underline{q \cdot \pi(0) + q\pi(1) = \pi(0)}, \Rightarrow \underline{\pi(0) p = q \pi(1)}.$

посл. ур-е: $\underline{p \pi(N-1) + p \pi(N) = \pi(N)}, \Rightarrow \underline{\pi(N) q = p \pi(N-1)}.$

$(*)$ $\pi(0) p + \pi(2) q = \pi(1) \Leftrightarrow q\pi(1) + q\pi(2) = \pi(1) \Leftrightarrow p\pi(1) = q\pi(2).$

$\forall i$ верно: $\boxed{\pi(i) q = \pi(i-1) p}$ Тогда $\pi(i) = \ldots$

Условие нормировки: $\pi(0)+\pi(1)+\ldots+\pi(N)=1 \Rightarrow \pi(0)\left[1+\frac{p}{q}+\left(\frac{p}{q}\right)^2+\ldots+\left(\frac{p}{q}\right)^N\right]$

$$\pi(0)=\frac{(p/q)^N-1}{p/q-1}, \quad p\neq q$$

<u>Отдельно</u>: если $p=q$, то $\pi(0)=\left[1+p/q+\ldots+(p/q)^N\right]^{-1}=\frac{1}{N+1} \Rightarrow$ <u>равномерн</u>

③ P – стохастическая матрица, сумма элементов каждой строки равна 1.

<u>1 – собственное число любой стохастической матрицы</u>

Действительно, $\det(\lambda E-P)=\det(\lambda E-P)^T=\det(\lambda E-P^T) \Rightarrow$ собствен. числа у матриц P и P^T совпадают

Очевидно, у P^T 1 является собственным числом, которому соответствует собственный вектор $(1,1,\ldots,1)$: $(1,1\ldots1)\cdot P^T=(1,\ldots1)$ т.к. сумма элементов $=1$.

Стационарное распределение – собственный вектор матрицы P, соответствующий собственному числу 1

④ <u>Задача</u>

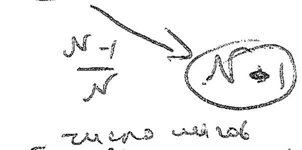
$(N-1)$ зрителей сели на случайные $(N-1)$ мест.

Последний хочет сесть на своё место. Если оно занято, то он просит пересесть. Если и то место занято, то уже пересаженный просит пересесть и...

Каждое перемещение – 45 секунд. Какова задержка начала – ?

<u>Состояние</u>:

Каждый раз один человек стоит и $N-1$ сидят. Пусть состояние 0, если стоящий обнаруживает своё место пустым, начальное состояние N.



максимальная задержка, которую можно ожидать с текущими значениями

$\boxed{k>0}$

$$\sum_{x=0}^{k} x\cdot\left[P_{k\to0}P(x=0)+\underbrace{P_{k\to k-1}\,P(X_{k-1}=x-1)}_{\text{тут сумма с 1}}\right]=\sum_{x=0}^{k}x\,\frac{1}{k}P(x=0)+\sum_{x=1}^{k}\frac{k-1}{k}xP(X_{k-1}=x-1)$$

число шагов до погл. состояния

$$X_k=\frac{1}{k}\cdot0+\frac{k-1}{k}\left(1+X_{k-1}\right)=\underline{1/k\cdot0+k-1/k\cdot\sum_{x=0}^{k-1}(x+1)P(X_{k-1}=x)},$$ где X_k – среднее число шагов из сост. k

Так как $X_1 = 0$ (действительно, $k=1$ означает что осталось одно место и оно правильное) $\Rightarrow$

$$X_k = \frac{k-1}{k}\left(1 + X_{k-1}\right) = \frac{k-1}{k}\left(1 + \frac{k-2}{k-1}\left(1+X_{k-2}\right)\right) =$$

$$= \frac{k-1}{k} + \frac{\cancel{k-1}}{k}\cdot\frac{k-2}{\cancel{k-1}}\left(1+X_{k-2}\right) = \frac{k-1}{k} + \frac{k-2}{k}\left(1+X_{k-2}\right) =$$

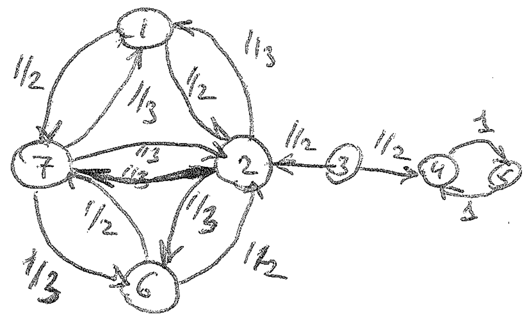
$$= \frac{1}{k}\left((k-1) + (k-2)\left(1+X_{k-2}\right)\right) = \ldots = \frac{1}{k}\left((k-1)+(k-2)+\ldots+1\right) = \underline{\frac{k-1}{2}}$$

$$\boxed{X_N = \frac{N-1}{2}}$$ × 45 секунд

5) отступление: задача о сумасшедшей старушке

6)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$



$1 \leftrightarrow 6$ I

$2 \leftrightarrow 7$ II

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Pi - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2/3 & \frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det = (-\lambda)(1/3 - \lambda) - 2/3 = \lambda^2 - 1/3\lambda - 2/3$$

корни: $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -2/3$

$A + B\cdot(-2/3)^n$ – вид каждого из элементов

(1,1): $\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ A+(-2/3)^1\cdot B = 0 \end{array}\right) \Rightarrow 1 - B - 2/3\,B = 0$

$5/3\,B = 1 \Rightarrow \underline{B = 3/5}$, $\underline{A = 2/5}$

(2,1) $\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-2/3B = 2/3 \end{array}\right)$ $A = 2/5$

$-5/3B = 2/3 \Rightarrow B = -2/5$

(1,2): $\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A\ldots \end{array}\right) \Rightarrow -B - 2/3B = 1 \Rightarrow$ $\underline{A = 3/5}$, $B = -3/5$

(2,2) $A+B=1$) $B = 2/5$