① Проверка домашки

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$ — нормальное распределение $\mu=0,\ \sigma=1$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$ — выборочное среднее

$$\hat{\sigma}^2 = \widehat{E(x^2) - (E(x))^2} = \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\Big[\Big(x_1^2+\ldots+x_n^2 - 2\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}(x_1+\ldots+$$

$$+ n\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2\Big] = \frac{1}{n}\Big[\Big(x_1^2 - 2\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}x_1 + \left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2\Big) + \ldots + \Big(x_n^2 - 2\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}x_n +$$

$$+\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2\Big)\Big] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2$$

Характеристическая ф-я: $\varphi(s) = e^{-\frac{1}{2}s^2}$

$\varphi_X(s) = E e^{i(sX)}$ => если $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$, то $\varphi_X(s) = \varphi_{x_1}(s)\ldots\varphi_{x_n}(s)$

$\varphi_X(s) = e^{-\frac{1}{2}ns^2}$, что соответствует распределению $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{1}{2n}x^2}$ — Гаусс со средним 0 и дисперсией $\sigma^2 = n$

Наша случайная величина $y = \frac{1}{n}X$, где $X = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$F_y = P(y \le x) = P(\frac{1}{n}X \le x) = P(X \le nx) = F_X(nx)$

$$\boxed{p_y(x)} = n\cdot p_X(nx) = n\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\cdot e^{-\frac{1}{2n}\cdot n^2x^2} = \underbrace{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2 n}{2}}}_{\text{распределение } \hat{\mu}}$$ => Гаусс со средним 0 и дисперсией $\frac{1}{n}$.

Рассмотрим теперь $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - y$

Разберёмся с y^2: $P(y^2 \le x) = P(-\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}) = F_y(\sqrt{x}) - F_y(-\sqrt{x})$

$$p_{y^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[p_y(\sqrt{x}) + p_y(-\sqrt{x})\right] = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\frac{xn}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi x}}\, e^{-\frac{xn}{2}}$$

Аналогично $p_{x_i^2}(x) = \left[p_x(\sqrt{x}) + p_x(-\sqrt{x})\right]\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{1}{2}x}$

② Среднее по выборке: $\bar{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$

Дисперсия по выборке: $D = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 / n$

Мы выяснили, что $D = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i/n\right)^2$

Рассмотрим совместное распределение независимых $X_1, X_2 \dots X_n$:

$$f_{\vec{X}}(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-1/2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

Введём замену переменных:

$$y_1 = \bar{x}, \quad y_2 = x_2 - \bar{x}, \quad \vdots \quad y_n = x_n - \bar{x}$$

$$\bar{x} = y_1, \quad x_2 = y_2 + y_1, \quad \vdots \quad x_n = y_n + y_1$$

$x_1 = n y_1 - x_2 - \dots - x_n = n y_1 - (y_2 + y_1) - (y_3 + y_1) - \dots - (y_n$
$= n y_1 - (n-1) y_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} y$
$= y_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} y$

Якобиан: $\det\left(\frac{\partial(x_1 \dots x_n)}{\partial(y_1 \dots y_n)}\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 1 & 0 \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

$= 1 \times \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $-$ по второй строке

$-$ $1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & & 1 & \end{pmatrix} = -1 - J_{n-1} = -2 - J_{n-2} =$

$= -(n-2) - J_2 = -(n-2) - \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -(n-2) - (1+1) = -n$

$|J_n| = n$ — якобиан

$$f_{y_1 y_2 \dots y_n}(y_1, y_2 \dots y_n) = f_{\vec{X}}(x_1 \dots x_n)\,|J| = n\, f_{\vec{X}}\left(y_1 - \sum_{i=2}^{n} y_i,\ y_1 + y_2,\ \dots y_1 + y_n\right),$$

$$f_{\vec{X}} = n \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) = n \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(nD + n\bar{X}^2\right)\right) = \left[n \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \exp(\dots) = \right]$$

$$= n \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n\bar{X}^2\right)\right) = n \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2\right)\right) =$$

$$f_{y_1 y_2 \dots y_n}(y_1, y_2 \dots y_n) = n \cdot \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=2}^{n} y_i\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} y_i^2 + n y_1^2\right]\right) =$$

$$= \underbrace{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-1/2\, n y_1^2}}_{\text{распределение среднего}} \cdot f_{y_2 \dots y_n}(y_2, \dots y_n) \Rightarrow y_1 \text{ независим от } (y_2, \dots y_n).$$

Рассмотрим $x_1 - \bar{x} = x_1 - y_1 = -\sum_{i=2}^{n} y_i \Rightarrow$ тоже не зависит от y_1.

Дисперсия — функция от $(x_i - \bar{x}) \Rightarrow$ <u>D не зависит от $\bar{X}$.</u>

<u>Найдём распределение D:</u>

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{Z} = \underbrace{nD}_{P} + \underbrace{n\bar{X}^2}_{Q} \qquad Z = P + Q$$

мы показали, что P и Q — независимы

$$\Psi_Z(t) = \Psi_P(t) \times \Psi_Q(t)$$

Z — распределение χ^2 с n степенями свободы, $\Psi_Z = (1-2t)^{-n/2}$

$$Q:\ F_Q(x) = P(n\bar{X}^2 \le x) = P\left(\bar{X}^2 \le \frac{x}{n}\right) = P\left(-\sqrt{\frac{x}{n}} \le \bar{X} \le \sqrt{\frac{x}{n}}\right) \Rightarrow$$

$$\| \quad F_{\bar{X}}\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right) - F_{\bar{X}}\left(-\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$$

$$\Rightarrow f_Q(x) = \cancel{2}\cancel{\sqrt{\frac{n}{2\pi}}}\, e^{-1/2\, n\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{n}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right) = \underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-1/2\, x}}$$

$\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2$

— χ^2 с 1 степенью свободы

$$\Psi_Q = (1-2t)^{-1/2}$$

$$\Psi_P = (1-2t)^{-(n-1)/2} \quad \text{— } \chi^2 \text{ } \underline{\text{с } n-1 \text{ степенью свободы}}$$