① Проверка домашнего задания

Прореживание по Реньи для геометрического распределения возьмём в виде $Geom(p) = p(1-p)^n$ — число неудач до первого успеха

$$T_\alpha(Geom(p))(n) = \sum_{y=n}^{\infty} C_y^n \alpha^n (1-\alpha)^{y-n} p(1-p)^y = \sum_{y=n}^{\infty} \frac{y!}{n!(y-n)!} \alpha^n (1-\alpha)^{y-n} p(1-p)^y =$$

$$= \frac{\alpha^n}{n!} p \sum_{y=n}^{\infty} \frac{y!}{(y-n)!} (1-\alpha)^{y-n}(1-p)^{y-n}(1-p)^n = \frac{\alpha^n}{n!} p(1-p)^n \sum_{y=n}^{\infty} y(y-1)\ldots(y-n+1)[(1-p)(1-\alpha)]^{y-n}$$

$$= \cancel{\left[\frac{\alpha^n}{n!} p(1-p)^n \sum_{y=n}^{\infty} [(1-p)(1-\alpha)]^{y-n} y(y-1)\ldots(y-n+1)\right]} = \frac{\alpha^n}{n!} p(1-p)^n \, d^n\Big(\sum_{y=0}^{\infty} \gamma^y\Big)/d\gamma =$$

[степени $< n$ при взятии производной исчезнут]

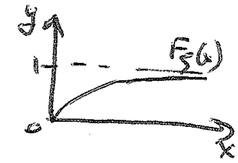
$$= \frac{\alpha^n}{n!} p(1-p)^n \cdot d^n\Big(1/(1-\gamma)\Big)/d\gamma = \frac{\alpha^n}{\cancel{n!}} p(1-p)^n \cancel{n!} \frac{1}{[1-(1-\alpha)(1-p)]^{n+1}} =$$

$$= \frac{p}{1-(1-\alpha)(1-p)} \cdot \left[\frac{\alpha(1-p)}{1-(1-\alpha)(1-p)}\right]^n = p^*(1-p^*)^n, \text{ где } \boxed{p^* = \frac{p}{1-(1-\alpha)(1-p)}}$$

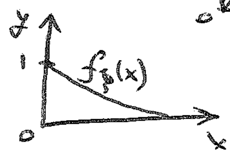
геометрическое распределение

② Проверка домашнего задания

Экспоненциальное распределение $F_\xi(x) = P(\xi \le x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$



$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$



Математическое ожидание: $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx =$

$$= \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda\Big[\frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx\Big] = \lambda\Big[\Big(\lim_{x\to\infty}\frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda} - 0\Big) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty}\Big] = \lambda\Big(\cancel{\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{\lambda(+\lambda)e^{+\lambda x}}}_{\to 0} + \frac{1}{\lambda}\Big(+\frac{1}{\lambda}\Big)\Big) = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

Дисперсия: $E\xi^2 = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\Big[-\frac{x^2e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}dx\Big] =$

$$= \lambda\Big[0 + \frac{2}{\lambda}\Big(-\frac{1}{\lambda}\Big) x e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda^2}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx\Big] = \lambda\Big[0 + \frac{2}{\lambda^2}\Big(-\frac{1}{\lambda}\Big)e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}\Big]$$

$$= -\lambda\frac{2}{\lambda^3}(0-1) = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow D\xi = \frac{2}{\lambda^2} - \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^2 = \boxed{\frac{1}{\lambda^2}}$$

Стандартное отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \frac{1}{\lambda}$

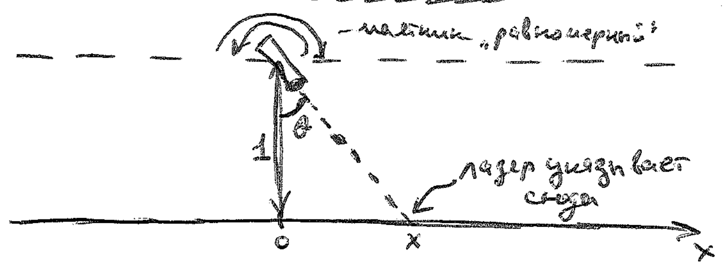
Мода: точка максимума ф-ии плотности вероятности $\boxed{\xi = 0}$

Медиана: $\inf x : P(\xi \le x) \ge \frac{1}{2}$

$P(\xi \le x) \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda x} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda x \le -\ln 2 \Leftrightarrow x \ge \frac{\ln 2}{\lambda}$ ($\lambda > 0$)

$\inf(x) = \boxed{\frac{\ln 2}{\lambda}}$

③ Распределение Коши



θ распределено равномерно на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f_\theta(\theta) = \begin{cases} 1/\pi, & -\pi/2 \le \theta \le \pi/2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$F_\theta(\theta) = \frac{1}{\pi}\theta + C, \quad F_\theta(-\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$F_X(x) = P(X \le x) = P(\theta \le \operatorname{arctg} x) = F_\theta(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$

$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$, $-\infty < x < \infty$ — распределение Коши

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} x f_X(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

$\int \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} x\,dx = \int \frac{d(1+x^2)}{2\pi(1+x^2)} = \frac{1}{2\pi} \ln(1+x^2) \Big|_a^\infty$

нет среднего

Характеристическая функция $\varphi_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\,dF_X(x)$

$\varphi(s) = e^{-|s|}$

На лекции: закон больших чисел $P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) \le \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (среднее по выборке)

Однако, для распределения Коши: $\varphi_{\overline{X}_n}(s) = \varphi_{\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)}(s) = \varphi_{(x_1+\ldots+x_n)}(\frac{s}{n}) =$

$= \left(\varphi(\frac{s}{n})\right)^n = \left(e^{-|\frac{s}{n}|}\right)^n = e^{-|s|} = \varphi_X(s)$, т.е. среднее выборки распределено так же, как любое из слагаемых.

④ **Распределение нормальное**

$N(0, 1)$ — дисперсия, среднее

$\frac{S_n - \mu n}{\sigma \sqrt{n}} \to N(0,1)$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (из центральной предельной теоремы)

Характеристическая функция $\varphi(s) = e^{-\frac{1}{2}s^2}$

Упражнение: распределение Гаусса $X = \mu + \sigma Y$, где Y — нормальная

$\varphi_X(s) = ?$ $\quad p_X(x) = ?$

$$\varphi_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} p_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(\mu+\sigma y)} p_Y(y)\frac{1}{\sigma} d(\mu+\sigma y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is\mu} e^{is\sigma y} p_Y(y)\frac{\sigma}{\sigma}dy$$

$$= e^{is\mu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(\sigma y)} p_Y(y)\,dy = e^{is\mu}\varphi_Y(s\sigma) = e^{is\mu}\cdot e^{-\frac{1}{2}s^2\sigma^2} = e^{\left(is\mu - \frac{\sigma^2 s^2}{2}\right)}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(\mu + \sigma Y \le x) = P\left(Y \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_Y\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$p_X(x) = p_Y\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

⑤ Вектор $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с нормальными компонентами

Длина вектора равна $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = Y$. Распределение — ?

⑥ Распределение $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = Y$, $\quad p_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 x^2} \sim N(0,1)$

Для $n=1$ – пятиминутка, $p_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{1}{2}x}$

Пусть $n=2$, т.е. $Y = X_1^2 + X_2^2$

$$F_Y = P(Y \le x) = P(X_1^2 + X_2^2 \le x) = \iint\limits_{x^2+y^2 \le x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 y^2} dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le x} \frac{1}{2\pi} e^{-1/2(x^2+y^2)} dx\, dy = [\text{полярные координаты}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot J(r,\theta)\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{x}} r e^{-\frac{1}{2}r^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}r^2} \frac{1}{2} d(r^2) = - e^{-\frac{1}{2}r^2} \Big|_0^{\sqrt{x}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}x}$$

$p_Y(x) = \frac{1}{2} e^{-1/2 x}$ – экспоненциальное распределение

В общем случае:

$$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt \text{ – Бета-функция}$$

Подставим $t = \cos^2\varphi$: $\quad B(u,v) = \int_{\pi/2}^{0} (\cos\varphi)^{2u-2} (\sin\varphi)^{2v-2} \cdot 2(-\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi =$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\cos\varphi)^{2u-1} (\sin\varphi)^{2v-1} d\varphi \text{ – другой вид.}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \text{ – Гамма-функция}$$

Th $\quad B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-t} t^{u-1} dt \int_0^\infty e^{-s} s^{v-1} ds = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t+s)} t^{u-1} s^{v-1} dt\, ds$$

Замена $\quad t = xy$, $\quad s = x(1-y)$ $\quad t+s = x$

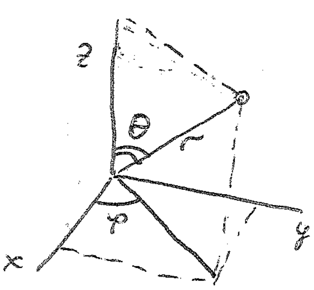
$$\begin{cases} xy > 0 \\ x(1-y) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ 1-y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \qquad J = \left| \begin{pmatrix} \partial t/\partial x & \partial t/\partial y \\ \partial s/\partial x & \partial s/\partial y \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{vmatrix} = -xy - x + xy = -x$$

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \int_0^\infty \int_0^1 e^{-x} x^{u-1} y^{u-1} (1-y)^{v-1} x^{v-1} dx\, dy = \int_0^\infty e^{-x} x^{u+v-1} dx \int_0^1 y^{u-1}(1-y)^{v-1} dy =$$

$$= \Gamma(u+v)\, B(u,v), \text{ ч.т.д.}$$

(1) <u>Домашка</u>

Полярные координаты 3D:



$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

$$J = \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \dots \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \sin\theta\cos\varphi\cdot\det\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ 0 & -r\sin\theta\end{pmatrix} - (-r\sin\varphi\sin\theta)\cdot\det\begin{pmatrix}\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$+ r\cos\theta\cos\varphi\cdot\det\begin{pmatrix}\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & 0\end{pmatrix} = -r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi + r\sin\theta\sin\varphi\cdot$$

$$\cdot(-r\sin^2\theta\sin\varphi - r\cos^2\theta\sin\varphi) + r\cos\theta\cos\varphi(-r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi) =$$

$$= -r^2\cos^2\varphi\sin^3\theta - r^2\sin\theta\sin^2\varphi(\sin^2\theta+\cos^2\theta) - r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi =$$

$$= -r^2\sin\theta(\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi) = -r^2\sin\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) =$$

$$= -r^2\sin\theta \Rightarrow |J| = r^2\sin\theta$$

Расширение на nd:

$$\begin{cases} x_n = r\cdot\cos\theta_{n-1} \\ x_{n-1} = r\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ x_{n-2} = r\cos\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ \dots \\ x_1 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

координаты $(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$

$$J_n = \det\left(\frac{\partial(x_n, x_{n-1}\dots x_1)}{\partial(r,\theta_{n-1},\theta_{n-2}\dots\theta_1)}\right) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta_{n-1} & -r\sin\theta_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & r\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & -r\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\dots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \cos\theta_{n-1}\cdot\det\begin{pmatrix} r\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & -r\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ r\sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\dots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & \dots \end{pmatrix} -$$

$$-(-r\sin\theta_{n-1})\cdot\det\begin{pmatrix} \cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & -r\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \\ \sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1} & r\sin\theta_1\dots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\theta_{n-1}\cdot r\cdot\cos\theta_{n-1}\cdot(\sin\theta_{n-1})^{n-2}\cdot\det\begin{pmatrix}\cos\theta_{n-2} & \\ \vdots & \ddots \\ \sin\theta_1\dots\sin\theta_{n-2} & \end{pmatrix} + r\sin\theta_{n-1}(\sin\theta_{n-1})^{n-2}\cdot$$

$$\cdot\det(\dots) = \left(r\cos^2\theta_{n-1}(\sin\theta_{n-1})^{n-2} + r(\sin\theta_{n-1})^{n}\right)J_{n-1} =$$

$= r(\sin\theta_{n-1})^{n-2}(\sin^2\theta_{n-1}+\cos^2\theta_{n-1})\, J_{n-1} = r(\sin\theta_{n-1})^{n-2} J_{n-1} =$

$= r(\sin\theta_{n-1})^{n-2}\, r(\sin\theta_{n-2})^{n-3} J_{n-2} = \ldots = r^{n-3}\prod_{i=3}^{n-1}(\sin\theta_i)^{i-1}\cdot J_2 = r^{n-3}\cdot\prod_{i=3}^{n-1}(\sin\theta_i)^{i-1}\cdot$

$\cdot r^2\sin\theta_2 = \underbrace{r^{n-1}\prod_{i=2}^{n-1}(\sin\theta_i)^{i-1}}$ — якобиан n-мерного преобраз-я в сферические координаты

можно наоборот углы нумеровать: $x_n = r\cos\theta_1$, тогда будет точь-в-точь

Вывод χ^2 с n степенями свободы: $P_\chi(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} e^{-x/2}x^{n/2-1}$

χ^2 с 1 степенью свободы: $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-1/2x}$

Производящая функция моментов: $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-1/2x} e^{tx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^{-1/2}e^{-(1/2-t)x}dx =$

Замена: $y = (1/2-t)x$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{1}{1/2-t}\right)^{-1/2} y^{-1/2}e^{-y}dy\cdot\frac{1}{1/2-t} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{1-2t}\right)^{1/2}\cdot\int_0^\infty e^{-y}y^{-1/2}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot(1-2t)^{-1/2}\cdot\Gamma(1/2) = (1-2t)^{-1/2}$

Значит, ф-я моментов для χ^2 с n степенями: $\boxed{(1-2t)^{-n/2}}$

$$F_y = P(y \le R) = P(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \le R) = \int\limits_{x_1^2+\ldots+x_n^2 \le R} \!\!\cdots\! \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-1/2(x_1^2+\ldots+x_n^2)} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_0^{\sqrt{R}} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^{n-1} \sin^{n-2}(\varphi_1) \ldots \sin(\varphi_{n-2})\, d\varphi_{n-1} \ldots d\varphi_1\, dr \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}r^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_0^{\sqrt{R}} r^{n-1} e^{-\frac{1}{2}r^2} dr \left(2\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(\varphi_1)\, d\varphi_1\right) \cdot \left(2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^{n-3}(\varphi_2)\, d\varphi_2\right) \ldots \left(4 \int_0^{\pi/2} d\varphi_{n-1}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \int_0^{\sqrt{R}} r^{n-1} e^{-1/2 r^2} dr \cdot B\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{n-2}{2}; \frac{1}{2}\right) \ldots B\left(1, \frac{1}{2}\right) 2B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot 2 \int_0^{\sqrt{R}} r^{n-1} e^{-1/2 r^2} dr \cdot \frac{\Gamma\left(\cancel{\frac{n-1}{2}}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}} \cdots \frac{\cancel{\Gamma(1)}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma(1)}}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot 2 \int_0^{\sqrt{R}} r^{n-1} e^{-1/2 r^2} dr \Rightarrow F_y'(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cancel{2} \cdot \sqrt{x}^{\,n-1} e^{-\frac{1}{2}x} \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} =$$

$$P_y(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)\, 2^{n/2}} e^{-x/2} x^{n/2-1} \quad \frac{\left(\Gamma(1/2)\right)^n}{\left(\sqrt{\pi}\right)^n}$$

Найдём $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$: $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx \int e^{-y} y^{\frac{1}{2}-1} dy = \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \int \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy$

[замени $x = u^2$, $y = v^2$] $=$ $\int_0^\infty e^{-u^2} \cdot \cancel{u^{-1}} \cdot 2\cancel{u}\, du \int_0^\infty e^{-v^2} \cancel{v^{-1}}\, 2\cancel{v}\, dv =$

$u = x^{1/2}$

$v = y^{1/2}$

$$= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)} du\, dv = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty e^{-r^2} r\, dr\, d\theta =$$

т.к. $x, y > 0$

$$= 4 \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-r^2} d(r^2) = 4 \cdot \frac{\pi}{4}\, e^{-r^2} (-1) \Big|_0^\infty = \pi.$$

Тогда окончательно: $\boxed{P_y(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)\, 2^{n/2}} e^{-x/2} x^{n/2-1}}$ – распределение χ^2 - (хи-квадрат) с n степенями свободы