① **Проверка домашки:**

Y – с.в., распределённая по Пуассону, $G_Y(z) = e^{\lambda(z-1)}$

X_i – с.в. Бернулли, $G_X(z) = (1-p) + pz$

$$N = \sum_{i=1}^{Y} X_i \Rightarrow G_N = G_Y(G_X(z)) = e^{\lambda((1-p)+pz-1)} = e^{\lambda(pz-p)} = e^{\lambda p(z-1)}$$

$$E[N] = G_N'(z)\Big|_{z=1} = \lambda p \cdot e^{\lambda p(z-1)}\Big|_{z=1} = \lambda p$$

Распределение: $e^{\lambda p(z-1)} = e^{\lambda p z} \cdot e^{-\lambda p} = e^{-\lambda p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p z)^k}{k!} =$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} p(N=k) \cdot z^n}$$

Единственность степенного ряда: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\{a_n\}$ определены единственным образом

$f(0) = a_0,\ f'(0) = a_1,\ f''(0) = 2a_2,\ \dots \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

[$\Psi_X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p(X=n) e^{sn} = \sum_{n=0}^{\infty} p(X=n) (e^s)^n$; $\Rightarrow \Psi_X(s) = G_X(e^s)$ ⊛

$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(X=n) z^n = p(X=0) + \sum_{n=1}^{\infty} p(X=1) z^n$; $G_X(0) = p(X=0)$, $G_X'(0) = p(X=1)$ и т.д.

получить $p(X=$… обратное преобразование Лапласа

⊛ $p(X=n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_X(i\theta) e^{-in\theta} d\theta$

Таким образом, $p(N=n) = \frac{(\lambda p)^n e^{-\lambda p}}{n!} = \mathrm{Poisson}(\lambda p)$

Можно „честно": $T_p(\overset{P_Y(\lambda)}{\mathrm{Poisson}(\lambda)})(n) = \sum_{y=n}^{\infty} \overset{P_Y}{\mathrm{Poisson}(y)} \cdot C_y^n \cdot p^n (1-p)^{y-n} =$

$$= \sum_{y=n}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} \cdot \underbrace{C_y^n}_{\frac{y!}{n!(y-n)!}} \cdot p^n (1-p)^{y-n} = \frac{e^{-\lambda}}{n!} (\lambda p)^n \sum_{y=n}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{y-n}}{(y-n)!} = \frac{e^{-\lambda}}{n!} (\lambda p)^n e^{\lambda(1-p)} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^n}{n!} = \mathrm{Poisson}(\lambda p)$$

„Прореживание" (thinning) по Реньи $T_p(\mathrm{distr})$

Д/з выполнить прореживание для геометрического распределения

2) Проверка домашки

$$P(y>m+n \mid y>m) = \frac{P(y>m+n,\ y>m)}{P(y>m)} = \frac{P(y>m+n)}{P(y>m)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n$$

$$P(y>m+n \mid y>m) = \frac{e^{m+n}}{e^m} = e^n$$

$$P(\min(y_1, \dots y_n) > y) = P(y_1>y, y_2>y, \dots, y_n>y) = \prod_{i=1}^{n} P(y_i>y) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i y} = e^{-y\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$$

$$P(\min(y_1, \dots y_n) > y) = \prod_{i=1}^{n} (1-p_i)^y = \left(\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)^y \Rightarrow \ geom\left(1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)$$

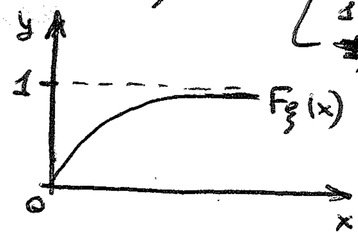
) Распределение максимума

$$P(\max(y_1, \dots, y_n) \leq y) = P(y_1\leq y)P(y_2\leq y)\dots P(y_n\leq y) = (1-e^{-\lambda_1 y})(1-e^{-\lambda_2 y})\dots(1-e^{-\lambda_n y})$$

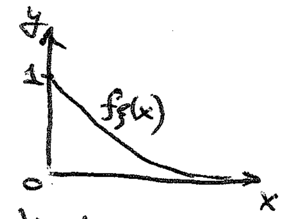
Экспоненциальное распределение

– кумулятивная ф-я распределения

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0 \end{cases}$$



$$f_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0; \\ 0, & x<0 \end{cases}$$ – функция плотности вероятности



Математическое ожидание: $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx =$

Лопиталь

$$= \lambda\int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx = \lambda\left[\frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right] = \lambda\left[\left(0-\left(\frac{-0\cdot e^0}{\lambda}\right)\right) + \frac{1}{\lambda}\cdot \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty\right] =$$

$$= \lambda\cdot\left[0-\frac{1}{\lambda^2}(0-e^0)\right] = \lambda\cdot\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \boxed{E\xi = \frac{1}{\lambda}}$$

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$; – дисперсия

$$E\xi^2 = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\left[-\frac{x^2e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^\infty + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x e^{-\lambda x}dx\right] =$$

$$= \lambda\left[0 + \frac{2}{\lambda}\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}\right)xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{2}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right] = \lambda\cdot\left[0+\frac{2}{\lambda^2}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty\right] =$$

$$= -\lambda\cdot\frac{2}{\lambda^3}(0-1) = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow D\xi = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \boxed{D\xi = \frac{1}{\lambda^2}}$$

Стандартное отклонение $\boxed{\sigma_\xi = \sqrt{D_\xi} = \frac{1}{\lambda}}$

Медиана: $P(\xi \le x) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda x} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda x \ge -\ln 2 \Leftrightarrow x \le \frac{\ln 2}{\lambda}$

$\boxed{\xi_{med} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$

Мода: точка максимума ф-ции плотности вероятности $\boxed{\xi = 0}$

5) Математическое ожидание максимума

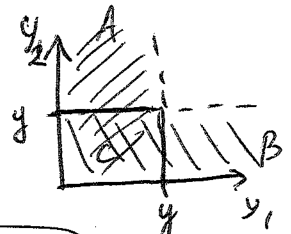
$Y = \max(Y_1, Y_2 \dots Y_n)$

$P(Y \le y) = \prod_{i=1}^{n} (1 - e^{-\lambda_i y})$

Рассмотрим $Y = Y_1 + Y_2$; $P(Y \le y) = (1 - e^{-\lambda_1 y})(1 - e^{-\lambda_2 y}) = 1 - e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y} + e^{-(\lambda_1+\lambda_2) y} =$

$= (1 - e^{-\lambda_1 y}) + (1 - e^{-\lambda_2 y}) - (1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2) y}) = P(Y_1 \le y) + P(Y_2 \le y) - P(\min(Y_1, Y_2) \le y)$

$= P(Y_1 \le y) + P(Y_2 \le y) - P(Y_1 \le y \vee Y_2 \le y)$



$f_Y = F'_Y = +\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} - (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2) y}$

$E[Y] = \int_0^\infty y \cdot (\lambda_1 e^{-\lambda_1 y} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} - (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2) y}) =$

$= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$

$(A + C) + (B + C) - (A + B + C) = \underline{C}$

Можно сразу, если заметить, что $\max(Y_1, Y_2) = Y_1 + Y_2 - \min(Y_1, Y_2)$ + линейность мат. ожидания.

6)