① Мы доказали: непрерывная функция распределения $\widetilde{F}(x) = F_\xi(x)$ — ф. распр. $Pr(\xi \le x)$, случайная величина $\eta = F_\xi(\xi) = \widetilde{F}(\xi)$ — равномерно распределена на $[0; 1]$.

② Пусть η равномерно распределена на $[0; 1]$. Тогда $\xi = \widetilde{F}^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения $\widetilde{F}(x)$.

[Если $F_\xi(x) = P(\xi \le x)$, то можно считать $\eta = F_\xi(\xi)$ (из ①). Но тогда $\xi = F_\xi^{-1}(\eta)$. С другой стороны, $\xi = \widetilde{F}^{-1}(\eta) \Rightarrow \widetilde{F}^{-1}(\eta) = F_\xi^{-1}(\eta) \Leftrightarrow \widetilde{F} = F_\xi$

$$F_\xi(x) = P(\xi \le x) = P(\widetilde{F}^{-1}(\eta) \le x) = P(\eta \le \widetilde{F}(x)) = F_\eta(\underset{[0;1]}{\widetilde{F}(x)}) = \widetilde{F}(x), \text{ т.к.}$$

$F_\eta(x) = x$ на отрезке $[0; 1]$.

③ Рассмотрим случайную величину ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$y = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$e^{-\lambda x} = 1 - y$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y)$$

$$F_\xi^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x)$$

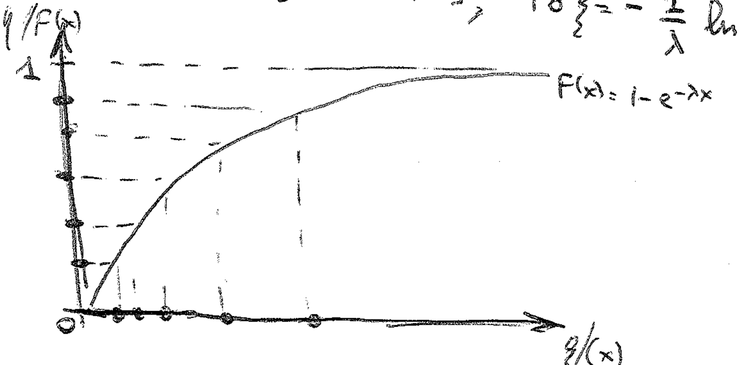
Пусть η — равномерно распределена на $[0; 1]$ $F_\eta(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$

Величина $\gamma = (1 - \eta)$ имеет распределение $F_\gamma(x) = P(\gamma \le x) = P(1 - \eta \le x) = P(\eta \ge 1 - x) =$

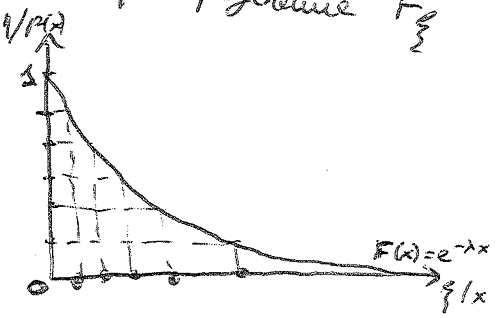
$$= 1 - P(\eta \le 1 - x) = \begin{cases} 1 - (1 - x) & 0 \le 1 - x \le 1, \\ 0, & 1 - x < 0 \vee 1 - x > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x < 0 \vee x > 1 \end{cases}$$

Значит, если $\eta \in U_{[0;1]}$, то $\xi = -\frac{1}{\lambda} \ln(\eta)$ имеет распределение F_ξ



или



④ Проверка домашки:

$x_1, x_2 \dots$ – случайные одинаково распределённые независимые случайные величины

$y \geq 0$ – независимая случайная величина

$N = \sum_{i=1}^{y} x_i$ – новая случайная величина

$$G_N(z) = \sum_n P_N z^n = \sum_{\vec{x}, y} P_{\vec{x}, y} z^{\sum_{i=1}^{y} x_i} = \sum_{\vec{x}, y} P_y(y)\, P_{\vec{x}}(\vec{x}\,|\underbrace{y}_{\text{независимые}})\, z^{\sum_{i=1}^{y} x_i} = \sum_y P_y(y) \sum_{\vec{x}} P_{x_1}(x_1) z^{x_1} P_{x_2}(x_2) \dots$$

$$= \sum_y P_y(y) \cdot G_{x_1}(z)\, G_{x_2}(z) \dots = \sum_y P_y(y) \cdot (G_x(z))^y = G_y(G_x(z))$$

⑤ Математическое ожидание $N = \sum_{i=1}^{y} x_i$

$$(G_N(z))'\Big|_{z=1} = G'_y(G_x(z)) \cdot G'_x(z)\Big|_{z=1} = G'_y(\underbrace{G_x(1)}_{1}) \cdot G'_x(1) = E[Y] \cdot E[X]$$

⑥ Домашка:

пусть птица насиживает $Y \sim Poisson(\lambda)$ яиц, каждое из которых даст птенца с вероятностью p и не даст с вероятностью $(1-p)$. Каково распределение числа птенцов и матем. ожидание?

⑦ Процесс Бернулли

0 h 2h 3h ... t $+\infty$

$P_{Bernulli} = \lambda h$

Если прошло время $t = nh$, то число успехов – биномиальное распределение

$$P(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Если $h \to 0$, то $p = \lambda \cdot h = const \cdot h \to 0$. При $n \to \infty$ число успехов за время t равно $p \cdot n = n\lambda h = \lambda t$, а распределение числа успехов стремится к Пуассоновскому

$$P(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Число испытаний до первого успеха – геометрическое распр-е $p(1-p)^{n-1}$, по сути оно определяет время между соседними успехами.

$$P(t < y) = P(t < h \cdot x) \overset{\text{геометри. расп.}}{=} P(x \geq t/h) = 1 - P(x \leq t/h) = 1 - \sum_{i=1}^{\lceil t/h \rceil} p \cdot (1-p)^{i-1}$$ – предст. как $\left(\frac{t}{h} + \lceil t/h \rceil - \right.$

$$= 1 - \cancel{p}\, \frac{1 - (1-p)^{t/h}}{\cancel{1-(1-p)}} = 1 - 1 + (1-p)^{t/h} = (1 - \lambda h)^{t/h} = \left(1 - \lambda t / (t/h)\right)^{t/h}$$

Имеем: $P(\underset{h\times}{\overset{\|}{y>t}}) = \left(1 - \frac{\lambda t}{t/h}\right)^{t/h} \xrightarrow[h\to\infty]{} e^{-\lambda t} \Rightarrow F_y = 1 - e^{-\lambda t}$ — экспоненциальное распределение

Точнее: $\left(1 - \frac{\lambda t}{t/h}\right)^{t/h} \left(1 - \frac{\lambda t}{t/h}\right)^{\lceil t/h \rceil - t/h}$.

Таким образом, экспоненциальное распределение — это время между успехами в Пуассоновском процессе.

(8) Продолжая аналогию с геометрическим распределением.

Свойство отсутствия памяти: $y \sim Geom(p)$; $P(y > m+n \mid y \geq m) = P(y > n)$

$$P(y > m+n \mid y \geq m) = \frac{P(y > m+n, y \geq m)}{P(y \geq m)} = \frac{P(y > m+n)}{P(y \geq m)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n$$

$$P(y > n) = (1-p)^n$$

Это понятно по построению геометрич. распределения, т.к. испытание Бернулли независимые

Для экспоненциального распределения:

$$P(y > m+n \mid y > m) = \frac{P(y > m+n, y > m)}{P(y > m)} = \frac{P(y > m+n)}{P(y > m)} = \frac{e^{m+n}}{e^m} = e^n$$

(9) Минимум:

$$P(\min(y_1 \ldots y_n) > y) = P(y_1 > y, y_2 > y \ldots y_n > y) = \prod_{i=1}^{n} P(y_i > y) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} = e^{-x \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

Д/з: 1) верно ли для геом. распр.?
2) распределение максимума и матем ожидание?

(10) Лекция

Характеристическая ф-я $\varphi_x(s) = E e^{isx} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} dF_x(x)$

$$\left.\frac{d^k \varphi(x)}{d(is)^k}\right|_{s=0} = EX^k$$

(11) В окрестности точки $s=0$ может быть определён характеристический показатель $\eta_X(s) = \ln \varphi_X(s)$.

$[z = re^{i(\varphi + 2\pi k)}]$

$[\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)]$

если мнимая часть $(-\pi, \pi]$, то главная ветвь.

$\eta_X(0) = 0$

$$\eta_X(s) = \sum_{k\geq 0} \overset{\text{„каппа"}}{\varkappa_k} \frac{(is)^k}{k!}, \quad \varkappa_k = \left.\frac{d\,\eta_X(s)}{d(is)}\right|_{s=0}$$

$$\varphi' = \frac{d e^{\eta(s)}}{d(is)} = e^{\eta} \cdot \eta' \Rightarrow \varphi'|_{s=0} = \mu_1 = e^{\overset{0}{\eta(0)}} \cdot \varkappa_1 = \varkappa_1$$

$$\varphi'' = e^{\eta}(\eta')^2 + e^{\eta} \cdot \eta'' \Rightarrow \varphi''|_{s=0} = \varkappa_1^2 + \varkappa_2 = \mu_2$$

$$\varphi''' = e^{\eta}(\eta')^3 + 3e^{\eta}\eta'\eta'' + e^{\eta}\eta''' \rightarrow \mu_3 = \varkappa_1^3 + 3\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3$$

$$\varphi^{IV} = e^{\eta}(\eta')^4 + 6e^{\eta}(\eta')^2\eta'' + 3e^{\eta}(\eta'')^2 + 4e^{\eta}\eta'\eta''' + e^{\eta}\eta^{IV} \Rightarrow \mu_4 = \varkappa_1^4 + 6\varkappa_1^2\varkappa_2 + 3\varkappa_2^2 + 4\varkappa_1\varkappa_3 + \varkappa_4$$

<u>Обратно:</u>

$\varkappa_1 = \mu_1$

$\varkappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2$

$\quad \| $

$\quad DX$

$$\varkappa_3 = \mu_3 - 3\mu_1(\mu_2 - \mu_1^2) - \mu_1^3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$$

$$\varkappa_4 = \mu_4 - 4\mu_1\mu_3 + 12\mu_1^2\mu_2 - 3\mu_2^2 - 6\mu_1^4$$