Ф-ла Байеса: $P(B|A) = \dfrac{P(B)\,P(A|B)}{P(A)}$

$$P(M) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} \quad ; \quad P(N) = e^{-\mu}\frac{\mu^n}{n!}$$

$$P(M=m\,|\,M+N=k) = \frac{P(M=m)\cdot P(M+N=k\,|\,M=m)}{P(M+N=k)} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\cdot P(N=k-m)}{e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^m\cdot e^{-\mu}\mu^{k-m}}{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}\cdot\frac{k!}{m!(k-m)!} = C_k^m\,\cancel{\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{e^{-(\lambda+\mu)}}}\,\frac{\lambda^m\mu^{k-m}}{(\lambda+\mu)^k} =$$

$$= C_k^m\,\frac{\lambda^m}{(\lambda+\mu)^m}\cdot\frac{\mu^{k-m}}{(\lambda+\mu)^{k-m}} = C_k^m\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^m\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-m} = \underbrace{C_k^m\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^m\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right.}_{\text{биномиальное распределение}}$$

① Двери: левая p 　　**Парадокс Монти-Холла**

правая $1-p$

$$P(A_1|B_л) = \frac{P(B_л|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B_л)} = \frac{1/3 \cdot p}{1/3\cdot p + 1/3\cdot 0 + 1/3 \cdot 1} = \frac{p}{1+p}$$

$$P(A_1|B_п) = \frac{1/3\cdot(1-p)}{1/3(1-p) + 1/3\cdot 1 + 1/3\cdot 0} = \frac{1-p}{1-p+1} = \frac{1-p}{2-p}$$

$$\frac{p}{1+p} \geq 0{,}5 \Leftrightarrow p \geq 0{,}5 + p\cdot 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5p \geq 0{,}5 \Leftrightarrow p \geq 1$$ ⇒ когда $p=1$ без разницы

$$\frac{1-p}{2-p} \geq 0{,}5 \Leftrightarrow 1-p \geq 1 - 0{,}5p \Leftrightarrow 0{,}5p \leq 0 \Leftrightarrow p \leq 0$$ ⇒ когда $p=0$ без разницы

$$P(B_п) = \frac{1}{3}\cdot(1-p) + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3}\cdot(2-p)$$

$$P(B_п|И_1) = \frac{1}{3}\cdot(1-p) + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{2-p}{3}$$

$$P(B_п|И_2) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot(1-p) + \frac{1}{3}\cdot 0$$

$$P(B_п|И_3) = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot(1-p)$$

---

② $X : x \in R = \{-\infty < x < +\infty\}$

$F_X(x)$ — кумулятивная функция распределения

$F_X(x) = P(X \leq x)$

1) $F_X(x)$ не убывает

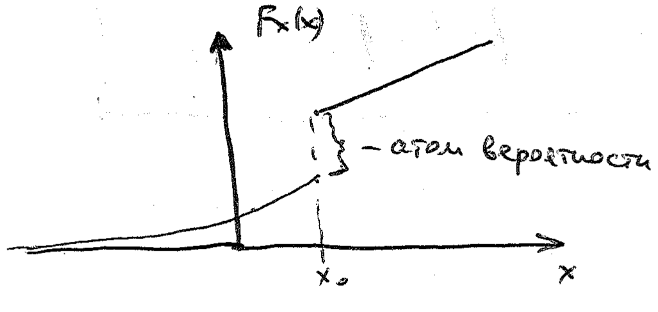
2) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$

3) $\lim\limits_{x \to x_0+0} F(x) = F(x_0)$

③ $P(X \in (a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$

$P(X \in [a, b]) = F_X(b) - F_X(a-0)$

$P(X \in (a, b)) = F_X(b-0) - F_X(a)$



④ Если существует p_X, что для всех x

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(\xi)\, d\xi$$, то $F_X(x)$ — абсолютно непрерывная

функция плотности вероятности

⑤ Математическое ожидание

$$EX = \int^{\infty} x\, p_X(x)\, dx \qquad E f(x) = \int f(x)\, p_X(x)\, dx$$

6) Замена переменной

$\eta = a\xi + b$, $a \neq 0$; $p_\eta(x)$ — функция плотности вероятности η — ?

Пусть $a > 0$: $F_\eta(x) = P(a\xi + b \le x) = P\left(\xi \le \frac{x-b}{a}\right) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} f_\xi(t)\,dt$

$\left[t = \frac{y-b}{a},\ dt = \frac{dy}{a}\right]$ верхний предел $t = \frac{x-b}{a}$, $y = ta + b = \frac{x-b}{a}\cdot a + b = x$

$$F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right)dy = \frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Пусть $a < 0$: $F_\eta(x) = P(a\xi + b \le x) = P\left(\xi \ge \frac{x-b}{a}\right) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} f_\xi(t)\,dt$

$\left[t = \frac{y-b}{a},\ -\infty \to +\infty\right]$

$$F_\eta(x) = \int_{x}^{-\infty} \frac{1}{a} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right)dy = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{x} f_\xi\left(\frac{y-b}{a}\right)dy;$$

Имеем: $\boxed{f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)}$

7) Замена переменной (ч/з замену переменной в определённом интеграле)

$\eta = g(\xi)$ — монотонная непрерывная функция => существует обратная ф-я

$$\boxed{f_\eta(x) = \left|(g^{-1}(x))'\right| f_\xi(g^{-1}(x))}$$

модуль производной

из замены $t = g^{-1}(y)$

$dt = (g^{-1}(y))'\,dy$

из курса матанализа: требуется непрерывная производная $g(x)$

8) Квантильное преобразование:

Пусть задана непрерывная ф-я распределения $F(x) = F_\xi(x)$. Тогда случайная величина $\eta = F(\xi)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$

$$F_\eta(x) = P(F(\xi) \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ P(\xi \le F^{-1}(x)), & x \in [0, 1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

$P(\xi \le F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x \Rightarrow$ равномерно на $[0; 1]$

(9) Генерация произвольного распределения:

Пусть $\eta \in U_{0,1}$, а F – произвольная функция распределения. Тогда $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет ф-ю распределения F.

Действительно, $F(F(\xi)) = F(\eta) = U_{0,1}$

$$F^{-1}(U_{[0,1]}) = F^{-1}(F(F_\xi(\xi))) = \underline{F_\xi(x)}$$

(10) Случайное число случайных слагаемых

Пусть $x_1, x_2 \dots$ – случайные о.р. случ. величины независимы

$y \geq 0$ – независимая от всех них случайная величина

$N = \sum_{i=1}^{y} x_i$ – новая случайная величина

$$G_N(z) = \sum_n p_N \cdot z^n = \sum_{\vec{x}, y} p_{x,y} z^{\sum_{i=1}^{y} x_i} = \sum_{\vec{x}, y} p(y) P(\vec{x} \mid y) \cdot z^{\sum_{i=1}^{y} x_i} =$$

$$= \sum_{\vec{x}, y} p(y) P(x_1 \mid y) \cdot P(x_2 \mid y) \dots P(x_y \mid y) \cdot z^{\sum_{i=1}^{y} x_i} = \sum_y p(y) P_{x_1|y} z^{x_1} P_{x_2|y} z^{x_2}$$

$$= \sum_{\vec{x}, y} p(y) \; P(x_1) z^{x_1} \; P(x_2) z^{x_2} \dots = \sum_y p(y) \sum_{x_1} P(x_1) z^{x_1} \sum_{x_2} P(x_2) z^{x_2} \dots =$$

$$= \sum_y p(y) \cdot (G_x(z))^y = \underline{\underline{G_y(G_x(z))}}$$

$$(G_N(z))'\Big|_{z=1} = G'_y(G_x(z)) \cdot G'_x(z)\Big|_{z=1} = G'_y(\underbrace{G_x(1)}_{1}) G'_x(1) =$$

$$= E[y] \cdot E[x].$$